Centre de recherche sur les transports (C.R.T.)
*Centre for Research on Transportation*

**CRT-2004-27**

# UN MODÈLE POUR LA CONCEPTION D'UN RÉSEAU DE DISTRIBUTION AVEC LOCALISATION, AFFECTATION ET STOCKS

**par**

**Guillaume Hamer-Lavoie**
**Jean-François Cordeau**

**Novembre 2004**

Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal QC H3C 3J7 Canada
Téléphone: (514) 343-7575 / Télécopieur: (514) 343-7121

crt@crt.umontreal.ca
www.crt.umontreal.ca

HEC ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL Université de Montréal

105-01986/

**PUBLICATION**
**CRT-2004-27**

# UN MODÈLE POUR LA CONCEPTION D'UN RÉSEAU DE DISTRIBUTION AVEC LOCALISATION, AFFECTATION ET STOCKS

**par**

**Guillaume Hamer-Lavoie**[1]
**Jean-François Cordeau**[1,2]

Cette recherche a été réalisée grâce en partie au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG).

[1] Service de l'enseignement de la gestion des opérations et de la production, HEC Montréal, 3000, Côte-Sainte-Catherine, Montréal, Canada H3T 2A7

[2] Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal, Canada H3C 3J7

Dépôt légal – Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada, 2004

**Abstract**

This article introduces a mixed-integer linear programming model for a network design problem in which one must locate warehouses, assign customers to these warehouses, determine the inventory levels that are necessary to meet the stochastic demand of the customers and choose the transportation modes used for replenishment. The problem is defined on a multiple-period planning horizon during which the distribution of demand may vary. Several types of valid inequalities are also proposed to accelerate the solution of the problem by a branch-and-bound method. Computational experiments are reported on instances involving up to 48 customers, 16 products and 12 periods.

**Keywords**: logistics, location-allocation, network design, inventory.

**Résumé**

Cet article présente un modèle de programmation linéaire en variables mixtes pour un problème de conception d'un réseau de distribution dans lequel on doit à la fois localiser des entrepôts, affecter les clients à ces entrepôts, déterminer les niveaux de stocks à maintenir pour répondre à la demande stochastique des clients et choisir les modes de transport à utiliser pour le réapprovisionnement. Le problème est défini sur un horizon de plusieurs périodes au cours desquelles la distribution de la demande peut varier. Afin d'accélérer la résolution du problème par une méthode de séparation et évaluation, plusieurs inégalités valides sont présentées. Les résultats d'expériences de calcul sont rapportés pour des instances comportant jusqu'à 48 clients, 16 produits et 12 périodes.

**Mot-clés** : logistique, localisation-affectation, conception de réseau, stocks.

# 1 Introduction

La gestion de la chaîne d'approvisionnement est un sujet d'actualité en raison du potentiel d'économies qui en découle, particulièrement dans un contexte de globalisation des marchés. Aux États-Unis, les dépenses annuelles associées aux activités logistiques non militaires sont estimées à plus de 11% du produit national brut, et ces coûts peuvent représenter plus de 30% du prix de vente des produits de consommation [15]. Les coûts de transport constituent la composante principale des coûts de logistique, alors que les coûts afférents au stockage en représentent 30% [6]. Aussi, 50% des plaintes des clients sont dues à une mauvaise gestion du réseau de distribution [13].

Dans cet article, nous considérons un problème de localisation-affectation avec stocks qui consiste à déterminer une configuration à coût minimal pour le réseau de distribution d'une entreprise, de sorte que la demande de chaque client pour chaque produit à chaque période soit satisfaite selon les exigences de service retenues. Plus spécifiquement, il consiste en la localisation d'entrepôts à l'intérieur d'un réseau de distribution permettant d'acheminer des produits à partir des usines jusqu'aux clients et en l'affectation des demandes des clients à des installations appropriées. Les flux entre les usines et les clients transitant possiblement par plusieurs autres installations doivent aussi être déterminés, de même que les modes de transport utilisés. De plus, la quantité de produit à stocker dans chaque installation d'entreposage faisant partie des échelons intermédiaires est calculée en tenant compte des demandes stochastiques des clients. Ces demandes sont traitées sous l'hypothèse qu'elles obéissent à une loi normale et qu'elles sont indépendantes. Les décisions sont prises dans un contexte multi-périodes, où l'ensemble des périodes constitue l'horizon de planification désiré.

Le problème étudié est une généralisation du problème de localisation discret qui consiste à localiser des installations parmi un ensemble de sites potentiels pour y affecter les demandes des clients tout en minimisant la somme des coûts fixes d'implantation et des coûts variables de desserte [1, 8, 11]. Les modèles de conception de réseaux de distribution reprennent l'idée générale des modèles de localisation discrets, mais en y ajoutant un ou plusieurs échelons. Traditionnellement, les usines, les entrepôts et les clients sont incorporés dans ce type de modèles, mais la localisation ne se fait qu'au niveau des entrepôts. Ce faisant, on doit tenir compte des flux entre usines, entrepôts et clients. De plus, on considère une plus grande variété de contraintes que dans les problèmes de localisation discrets. Publié en 1974, l'article de Geoffrion et Graves [9] a constitué une référence pour beaucoup de travaux qui ont suivi. Par exemple, Pirkul et Jayaraman [14] ont proposé un modèle aux bases semblables à celui de Geoffrion et Graves, mais en considérant le problème de localisation à la fois sur l'échelon des usines et sur celui des centres de distribution. Un modèle multi-périodes pour la conception de réseaux logistiques dans un contexte mondial a aussi été développé par Arntzen et al. [2] pour l'amélioration du réseau logistique de la firme Digital Equipment Corporation.

Plus récemment, Dogan et Goetschalckx [7] ont décrit un modèle détaillé pour la conception d'un réseau logistique dans un contexte domestique. Ce modèle intègre à la fois les décisions stratégiques telles la localisation des installations et les décisions tactiques concernant la production et les niveaux de stocks. Une approche semblable a également été proposée par Cordeau, Pasin et Solomon [5]. Ce modèle considère une période de planification unique mais incorpore des décisions au niveau du choix des fournisseurs, de l'affectation des produits aux installations de production et de stockage ainsi que du choix des modes de transport.

Comme le révèlent les revues de la littérature de Vidal et Goetschalckx [16] et Lapierre, Ruiz et Soriano [10], peu de modèles proposés dans la littérature tiennent compte des stocks, et encore moins des stocks de sécurité relatifs à une demande stochastique. Cole [4] présente un modèle de configuration de réseaux de distribution tenant compte du niveau de service offert aux clients. Le modèle se nomme SILAS (*Strategic Inventory Location Allocation System*). Il permet la résolution du problème suivant : étant donné un ensemble d'usines et de clients, ainsi que des composantes potentielles d'un réseau de distribution, configurer un réseau constitué d'usines, d'entrepôts, de liens de transport et de stocks, de manière à satisfaire les demandes des clients selon le niveau de service requis, mais en engendrant le moindre coût possible. Dans ce modèle, le nombre d'échelons envisageables est déterminé à l'avance en raison du calcul des variances des demandes aux entrepôts ; ainsi, il ne peut y avoir plus de deux échelons d'entrepôts. De plus, le modèle est statique (une seule période constitue l'horizon temporel). L'approche d'approximation linéaire de la variance utilisée par Cole [4] est basée sur celle de Bazaraa et al. [3]. Selon cette méthode, chaque segment d'approximation est borné par deux variables continues. Il y a au plus deux de ces variables qui peuvent prendre une valeur positive, et ces deux variables doivent être adjacentes au même segment.

Le but de cet article est de proposer une modélisation linéaire en variables mixtes du problème de localisation-affectation avec stocks. La principale contribution de l'article réside dans l'inclusion de l'aspect stochastique de la demande donnant lieu au calcul des stocks de sécurité. Le modèle permet aussi de traiter un nombre arbitraire d'échelons entre les usines et les clients, ce qui n'est pas le cas dans les modèles proposés antérieurement. Nous présentons également plusieurs types d'inégalité valides qui renforcent la formulation et en accélèrent la résolution. Le modèle proposé est basé sur celui développé par Cordeau, Pasin et Solomon [5] pour la conception de réseaux logistiques. Nous le généralisons ici pour tenir compte d'un horizon de planification formé de multiples périodes, de la demande stochastique des clients et d'un nombre arbitraire d'échelons au niveau de la distribution des produits finis.

La suite de l'article est organisée comme suit. La section 2 présente une modélisation du problème de localisation-affectation avec stocks et discute de plusieurs généralisations du modèle. La méthodologie de résolution proposée pour résoudre le problème est ensuite décrite à la section 3. La section 4 présente finalement les résultats d'expériences réalisées sur des données générées aléatoirement.

# 2 Formulation mathématique

Cette section présente une première formulation, non linéaire, du problème étudié. Une approche de linéarisation par morceaux est ensuite décrite dans la section 2.2. Finalement, différentes extensions de cette formulation sont présentées à la section 2.3.

## 2.1 Modèle de base

Nous considérons un ensemble $K$ de produits, où chaque élément $k \in K$ représente un produit unique ou une agrégation de produits similaires, et un ensemble $C$ de clients, où chaque élément $c \in C$ représente un client distinct ou une zone de demande. Un ensemble $P$ d'usines est aussi défini, de même qu'un ensemble $W$ de sites potentiels pour les entrepôts. L'ensemble $\Phi^w$ est pour sa part constitué des différents types d'entrepôts $\phi$ envisageables au site $w$. Notons que les types $\phi \in \Phi^w$ font référence à des tailles d'entrepôts valables pour le site $w$.

Dans le but d'alléger la notation, il convient aussi de définir des ensembles globaux d'origines et de destinations. Ainsi, un ensemble $O$ des origines est défini, où chaque origine $o \in O$ représente une usine $p$ ou un site potentiel $w$ qui peut desservir une destination quelconque, ce qui implique que $O = P \cup W$. De manière semblable, un ensemble $D$ des destinations est défini, où chaque destination $d \in D$ représente un site potentiel $w$ ou un client $c$ qui peut recevoir un réapprovisionnement, ce qui implique que $D = W \cup C$. Nous notons ensuite par $M_{od}$ l'ensemble des modes de transport possibles entre l'origine $o$ et la destination $d$.

Il convient aussi d'introduire des ensembles spécifiques à chaque produit $k \in K$. Ainsi, un sous-ensemble $W^k \subseteq W$ des sites potentiels par lesquels peut transiter le produit $k$ est défini. Dans la même optique, le sous-ensemble $P^k \subseteq P$ regroupe les usines qui fabriquent le produit $k$, et le sous-ensemble $C^k \subseteq C$ regroupe les clients qui ont une demande pour le produit $k$. Aussi, un sous-ensemble $O^k \subseteq O$ des origines pouvant fournir le produit $k$ et un sous-ensemble $D^k \subseteq D$ des destinations pouvant se réapprovisionner en produit $k$ sont définis. En plus, un ensemble $M^k_{od} \subseteq M_{od}$ des modes de transport entre l'origine $o$ et la destination $d$ respectant les exigences de proximité relatives au produit $k$ est défini.

Finalement, un ensemble $T$ représentant l'horizon de planification est considéré, où $t \in T$ représente une période de cet horizon. Typiquement, l'horizon temporel employé représente une année divisée en douze périodes.

*Demande des clients*

On suppose que les demandes stochastiques des clients obéissent à des lois normales définies par les paramètres $\mu_c^{kt}$ et $\rho_c^{kt}$ qui sont respectivement la moyenne et la variance associées à la

demande du client $c$ pour le produit $k$ à la période $t$. De plus, les variables $(\sigma_w^{kt})^2$, représentant la variance associée à la demande de produit $k$ affectée à l'entrepôt $w$ à la période $t$, doivent être définies puisque leur valeur dépend de l'affectation des clients : la somme des variances des demandes des clients deviendra la variance de la demande affectée à l'entrepôt par lequel ces clients seront desservis, et ceci, pour chaque produit. Notons que la définition de ces variables $(\sigma_w^{kt})^2$ suppose que les distributions associées aux demandes sont indépendantes en probabilité, et donc que leur covariance est nulle.

Nous désignons par ailleurs par $z$ le facteur reflétant le niveau de service désiré. Ce paramètre relatif à la loi normale est défini pour permettre le calcul des stocks de sécurité selon la formule usuelle $z \cdot \sigma_\ell$ = stocks de sécurité, où $\sigma_\ell$ est l'écart-type de la demande durant le délai de livraison.

*Variables de décision et paramètres*

La localisation des entrepôts se fait à l'aide des variables binaires $Z_{w\phi}$ qui prennent la valeur 1 si un entrepôt de type $\phi$ est implanté au site potentiel $w$. Les paramètres $c_{w\phi}$ définissent les coûts fixes associés au maintien d'un entrepôt de type $\phi$ au site $w$.

Des variables continues $I_w^{kt}$ représentent les stocks périodiques de produit $k$ emmagasinés à la fin de la période $t$ au site $w$ dans le but de répondre à une demande d'une période ultérieure. Les paramètres $v_k$ et $r_k$ servent à calculer les coûts de stockage : $v_k$ représente la valeur monétaire du produit $k$, alors que $r_k$ consiste en un taux qui représente une fraction de la valeur du produit $k$ devant être associée aux coûts de stockage.

Par ailleurs, les paramètres $h_{w\phi}$ représentent la capacité de stockage d'un entrepôt de type $\phi$ situé sur le site potentiel $w$ ; cette capacité est exprimée en fonction de l'unité choisie pour évoquer la demande (boîtes, palettes, conteneurs, litres, $m^2$, $m^3$, etc.) Notons toutefois que la mesure de capacité doit pouvoir être appliquée à tous les produits inclus dans le modèle, puisqu'on considère la capacité globale de l'entrepôt de type $\phi$. Les paramètres $h^k$ représentent la capacité de stockage requise par une unité de produit $k$. En plus de se voir assigner des capacités de stockage, les entrepôts sont également assujettis à des capacités de traitement. Typiquement, ces contraintes servent à refléter la limite des activités de manutention pouvant être effectuées durant une période. Ainsi, les paramètres $u_{w\phi}$ représentent la capacité de traitement de l'entrepôt de type $\phi$ du site $w$, alors que les paramètres $u^k$ représentent la capacité de traitement requise par une unité de produit $k$. Par ailleurs, les paramètres $q_p^{kt}$ sont définis comme étant la capacité de production de l'usine $p$ durant la période $t$, et ce spécifiquement pour le produit $k$.

Étant donné que la formule du calcul des stocks de sécurité énoncée plus haut nécessite la connaissance du délai associé à un réapprovisionnement, nous introduisons aussi les paramètres $\ell_{pw}^m$ qui représentent le délai des approvisionnements soutenus par le mode de transport $m$ liant l'usine $p$ à l'entrepôt $w$. Cette durée est exprimée en fonction du temps total

compris dans une période de l'horizon de planification ; il s'agit donc d'un ratio. Par exemple, $\ell^m_{pw} = 1/4$ veut dire que le temps requis à l'entrepôt du site $w$ pour placer une commande à l'usine $p$ et en recevoir la livraison via le mode de transport $m$ est un quart de période.

Les flux unitaires de produits qui cheminent dans le réseau sont représentés par les variables continues $X^{kmt}_{od}$. Plus particulièrement, ces variables indiquent la quantité de produit $k$ qui transite sur le lien $(o, d)$ à la période $t$ via le mode de transport $m$. Les paramètres $c^{km}_{od}$ sont associés à ces flux de transport ; ils représentent les coûts variables de transport du produit $k$ par le mode $m$ entre l'origine $o$ et la destination $d$. Notons que l'on peut inclure les coûts de production dans ces paramètres lorsque l'origine considérée est une usine. De même, les coûts de traitement peuvent être inclus si l'origine est un entrepôt.

Les liens $(o, d)$ servis par le mode de transport $m$ et spécifiques au produit $k$ sont assujettis aux paramètres de capacité $q^{km}_{od}$, et ils sont conditionnés par les variables binaires $V^{km}_{od}$ qui prennent la valeur 1 si l'origine $o$ procure le produit $k$ à la destination $d$ en employant le mode $m$. En parallèle, les coûts fixes $c^{k}_{od}$ sont définis pour l'affectation du produit $k$ à l'origine $o$ et à la destination $d$.

Enfin, le choix du mode de transport est effectué à l'aide des variables binaires $Y^{m}_{od}$ qui prennent la valeur 1 si le mode de transport $m$ est choisi pour le lien $(o, d)$. Conjointement, on introduit les paramètres $c^{m}_{od}$ afin d'imposer un coût fixe au choix du mode de transport entre l'origine $o$ et la destination $d$. Aussi, les paramètres $g^{m}_{od}$ représentent la capacité globale du mode de transport $m$ exprimée selon l'unité de mesure choisie (litre, $m^3$, palette, etc.), alors que les paramètres $g^{km}$ représentent la capacité requise par une unité de produit $k$ dans le mode de transport $m$.

Le modèle pour la conception d'un réseau de distribution avec localisation, affectation et stocks s'énonce ainsi :

Minimiser

$$\sum_{w\in W}\sum_{\phi\in\Phi^w} c_{w\phi}Z_{w\phi} + \sum_{o\in O}\sum_{d\in D}\sum_{m\in M_{od}} c^m_{od}Y^m_{od} + \sum_{k\in K}\left[\sum_{o\in O^k}\sum_{d\in D^k}\sum_{m\in M^k_{od}}\left[c^k_{od}V^{km}_{od} + \sum_{t\in T} c^{km}_{od}X^{kmt}_{od}\right] + \sum_{w\in W^k}\sum_{t\in T} I^{kt}_w r_k\, v_k\right] \quad (1)$$

sujet à

$$\sum_{o\in O^k}\sum_{m\in M^k_{oc}} X^{kmt}_{oc} = \mu^{kt}_c \qquad k\in K; c\in C^k; t\in T \quad (2)$$

$$\sum_{d\in D^k}\sum_{m\in M^k_{pd}} X^{kmt}_{pd} \le q^{kt}_p \qquad k\in K; p\in P^k; t\in T \quad (3)$$

$$\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} X^{kmt}_{pw} - \sum_{c\in C^k}\sum_{m\in M^k_{wc}} X^{kmt}_{wc} - I^{kt}_w + I^{k(t-1)}_w = 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T \quad (4)$$

$$\sum_{\phi\in\Phi^w} Z_{w\phi} \le 1 \qquad w\in W \quad (5)$$

$$\sum_{c\in C^k}\sum_{k\in K}\sum_{m\in M^k_{wc}} u^k X^{kmt}_{wc} - \sum_{\phi\in\Phi^w} u_{w\phi} Z_{w\phi} \le 0 \qquad w\in W; t\in T \quad (6)$$

$$\sum_{k\in K} h^k I^{kt}_w - \sum_{\phi\in\Phi^w} h_{w\phi} Z_{w\phi} \le 0 \qquad w\in W; t\in T \quad (7)$$

$$X^{kmt}_{od} - q^{km}_{od} V^{km}_{od} \le 0 \qquad k\in K; o\in O^k; d\in D^k; m\in M^k_{od}; t\in T \quad (8)$$

$$\sum_{k\in K} g^{km} X^{kmt}_{od} - g^m_{od} Y^m_{od} \le 0 \qquad o\in O; d\in D; m\in M_{od}; t\in T \quad (9)$$

$$\sum_{o\in O^k}\sum_{m\in M^k_{od}} V^{km}_{od} \le 1 \qquad k\in K; d\in D^k \quad (10)$$

$$V^{km}_{od} - Y^m_{od} \le 0 \qquad k\in K; o\in O^k; d\in D^k; m\in M^k_{od} \quad (11)$$

$$\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} \sqrt{(\sigma^{kt}_w)^2}\sqrt{\ell^m_{pw}}\, V^{km}_{pw}\, z - I^{kt}_w \le 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T \quad (12)$$

$$(\sigma^{kt}_w)^2 - \sum_{c\in C^k}\sum_{m\in M^k_{wc}} \rho^{kt}_c V^{km}_{wc} = 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T \quad (13)$$

$$I^{kt}_w \ge 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T \quad (14)$$

$$X^{kmt}_{od} \ge 0 \qquad k\in K; o\in O^k; d\in D^k; m\in M^k_{od}; t\in T \quad (15)$$

$$(\sigma^{kt}_w)^2 \ge 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T \quad (16)$$

$$V^{km}_{od} \in \{0,1\} \qquad k\in K; o\in O^k; d\in D^k; m\in M^k_{od} \quad (17)$$

$$Y^m_{od} \in \{0,1\} \qquad o\in O; d\in D; m\in M_{od} \quad (18)$$

$$Z_{w\phi} \in \{0,1\} \qquad w\in W; \phi\in\Phi^w. \quad (19)$$

La fonction-objectif (1) minimise la somme des coûts fixes et des coûts variables tandis que les contraintes (2) assurent la satisfaction des demandes moyennes des clients. Les contraintes (3) imposent une capacité de production pour chaque produit à chaque usine alors que les contraintes (4) sont des contraintes de conservation des flux. Les contraintes (5) stipulent ensuite qu'il ne peut y avoir plus d'un type d'entrepôts par site potentiel. Les contraintes (6) imposent des capacités de traitement pour chaque type d'entrepôts alors que les contraintes (7) imposent les capacités globales de stockage. Les contraintes (8) limitent les quantités spécifiques à un produit pouvant transiter sur un lien $(o, d)$ servi par le mode de transport $m$ et les contraintes (9) imposent une capacité de transport à chaque mode $m$ choisi. Les contraintes (10) sont des contraintes d'approvisionnement unique spécifiques à chaque produit ; elles concernent les entrepôts et les clients. Ensuite, les contraintes (11) tissent un lien entre les variables $V_{od}^{km}$ et $Y_{od}^{m}$ sous la logique que l'activation d'un lien $(o, d)$ requiert absolument le choix d'un mode de transport. Finalement, les contraintes (12) exigent que les entrepôts maintiennent les niveaux de stocks de sécurité requis à chaque période alors que les contraintes (13) définissent les variances des demandes affectées aux entrepôts pour chaque produit et pour chaque période.

## 2.2 Approximation linéaire de la variance

Nous décrivons dans cette section les modifications à apporter pour remédier à la nature non linéaire du modèle. L'approximation linéaire de la variance consiste à estimer la courbe décrivant la relation entre l'écart-type et la variance par une série de segments linéaires, tel qu'illustré par l'exemple de la figure 1. Il s'agit d'identifier le segment qui contient la valeur de la variance $(\sigma_w^{kt})^2$ considérée. On remarque que la précision de l'approximation est proportionnelle au nombre de segments utilisés. Par contre, chaque segment étant borné par deux variables de combinaison convexe en plus d'être identifié par une variable binaire, le nombre de segments utilisés influence fortement le temps de calcul requis pour la résolution du problème. De plus, puisque les segments sont toujours sous la courbe à approximer ou exactement à sa hauteur, on peut dire que l'approximation linéaire sous-estime les valeurs réelles recherchées dans presque tous les cas.

Bien que l'on puisse accroître la précision de l'approximation en ajoutant des segments, il demeure que la qualité de la précision du premier segment restera toujours inchangée. En effet, si on définit le niveau d'erreur $(Er)$ comme étant la différence relative entre la valeur approximée $(f(a_i))$ et la valeur réelle $(\sqrt{(\sigma_w^{kt})^2})$ de l'écart-type au milieu d'un segment, on obtient toujours la relation suivante sur le premier segment, quelque soit le nombre de segments utilisés :

$$Er = \frac{\sqrt{(\sigma_w^{kt})^2} - [0,5 \cdot f(a_1)]}{\sqrt{(\sigma_w^{kt})^2}} \approxeq 29\%.$$

Cette situation est causée par la forme de la courbe décrivant la relation entre l'écart type

et la variance. Par contre, on peut dire que le niveau d'erreur absolue du premier segment va nécessairement décroître si l'on augmente le nombre de segments ; ce niveau d'erreur absolu $(Ea)$ au milieu du segment est donné par la relation $E_a = \sqrt{(\sigma_w^{kt})^2 - [0,5 \cdot f(a_1)]}$. Ainsi, lorsque l'on détermine le nombre de segments à employer dans l'approximation linéaire pour atteindre un niveau de précision désiré, il faut tenir compte du niveau d'erreur absolue pour le premier segment, mais on peut utiliser le niveau d'erreur relative pour tous les autres segments.

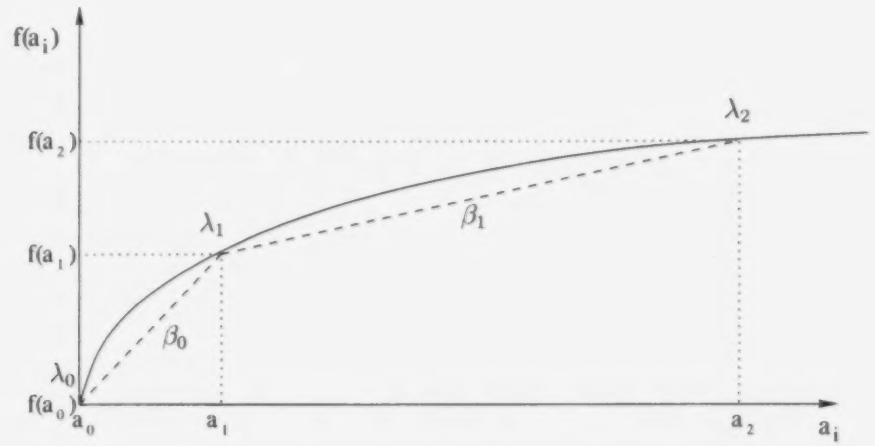


FIG. 1 – Exemple d'approximation linéaire par 2 segments de la relation entre la variance et l'écart-type.

La méthode d'approximation linéaire utilisée est celle de Nemhauser et Wolsey [12] ; elle nécessite une extension de la notation employée dans la modélisation de la section 2.1.

On définit un ensemble $\Omega$ qui contient tous les points $i \in \{1, 2, 3, ..., \omega\}$ marquant une borne quelconque pour un segment. Conséquemment, il y a un total de $\omega$ bornes et $\omega - 1$ segments. Chaque borne possède une valeur $a_i$ égale à la variance au point $i$, et une valeur $f(a_i)$ égale à l'écart-type correspondant. Des variables continues $\lambda_i$ jumelées à chaque point $i$ représentent le poids que la valeur de la variance ou de l'écart-type de ce point aura dans l'approximation linéaire du segment $i$ borné par les points $i$ et $i+1$. Les variables binaires $\beta_i$ prennent la valeur 1 si le segment $i$ est choisi pour l'approximation linéaire. Un seul $\beta_i$ désignant un segment, ainsi que deux bornes $\lambda_i$ et $\lambda_{i+1}$ désignant des points doivent prendre une valeur strictement positive. Afin d'inclure l'information concernant le délai d'approvisionnement de l'entrepôt considéré, les variables $\lambda_i$ et $\beta_i$ sont définies pour chaque lien $(p,w)$ ayant un mode de transport $m$ et pour chaque période. De plus, l'approximation doit être effectuée pour les demandes associées à chaque produit $k$. Conséquemment, on obtient les variables $\lambda_{ipw}^{kmt}$ et $\beta_{ipw}^{kmt}$.

Les contraintes non linéaires que l'on cherche à modifier sont les suivantes :

$$\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} \sqrt{(\sigma^{kt}_w)^2}\sqrt{\ell^m_{pw}}\, V^{km}_{pw}\, z - I^{kt}_w \;\leq\; 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T.$$

L'approximation linéaire basée sur la métode de Nemhauser et Wolsey (1988) s'opère en trois étapes :

1- Calculer la valeur des $\lambda^{kmt}_{ipw}$ pour la variance obtenue :

$$(\sigma^{kt}_w)^2 \;=\; \sum_{i\in\Omega}\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} \lambda^{kmt}_{ipw}\, a_i \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T; \tag{20}$$

$$\sum_{i\in\Omega} \lambda^{kmt}_{ipw} \;=\; V^{km}_{pw} \qquad k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T; \tag{21}$$

$$\lambda^{kmt}_{ipw} \;\geq\; 0 \qquad i\in\Omega; k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T. \tag{22}$$

2- Assurer que les $\lambda^{kmt}_{ipw}$ obtenus soient voisins et qu'il y en ait deux qui prennent une valeur positive :

$$\lambda^{kmt}_{1pw} \;\leq\; \beta^{kmt}_{1pw} \qquad k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T; \tag{23}$$

$$\lambda^{kmt}_{ipw} \;\leq\; \beta^{kmt}_{(i-1)pw} + \beta^{kmt}_{ipw}\; i\in\Omega\setminus\{1,\omega\}; k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T; \tag{24}$$

$$\lambda^{kmt}_{\omega pw} \;\leq\; \beta^{kmt}_{(\omega-1)pw} \qquad k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T; \tag{25}$$

$$\sum_{i\in\Omega\setminus\{\omega\}} \beta^{kmt}_{ipw} \;=\; 1 \qquad k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T; \tag{26}$$

$$\beta^{kmt}_{ipw} \;\in\; \{0,1\} \qquad i\in\Omega\setminus\{\omega\}; k\in K; p\in P^k; w\in W^k; m\in M^k_{pw}; t\in T. \tag{27}$$

3- Calculer l'écart-type ajusté du délai d'approvisionnement à l'aide des $\lambda^{kmt}_{ipw}$ dont on vient de confirmer la validité :

$$\sqrt{(\sigma^{kt}_w)^2\,\ell^m_{pw}} \;=\; \sum_{i\in\Omega}\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} \lambda^{kmt}_{ipw}\, f(a_i)\sqrt{\ell^m_{pw}} \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T. \tag{28}$$

En somme, les contraintes (12) sous forme linéaire s'écrivent de la manière suivante :

$$\sum_{i\in\Omega}\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M^k_{pw}} \lambda^{kmt}_{ipw}\, f(a_i)\sqrt{\ell^m_{pw}}\, z - I^{kt}_w \;\leq\; 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T. \tag{29}$$

## 2.3 Extensions du modèle

Nous décrivons dans cette section plusieurs généralisations possibles du modèle présenté à la section 2.1

### 2.3.1 Modélisation d'un nombre arbitraire d'échelons intermédiaires

Le modèle de la section 2.1 ne permet pas à un entrepôt d'approvisionner un autre entrepôt. Ce faisant, il ne peut y avoir qu'un seul échelon intermédiaire. Tel que mentionné plus tôt, cette limitation est causée par la présence des variables $(\sigma_w^{kt})^2$ reflétant le calcul des variances aux entrepôts. Néanmoins, Cole [4] propose d'accroître le nombre d'échelons de localisation de manière déterministe en ajoutant une série de variables pour chaque échelon supplémentaire. Ces variables ont pour but de retracer le flux des produits tout au long du réseau de distribution, afin d'y associer les variances des demandes des clients fournies sous forme de paramètres. Ainsi, les variables servant à retracer les flux des matières auront un nombre d'indices directement proportionnel au nombre d'échelons de localisation à modéliser. En conséquence, le nombre de variables du modèle croît très rapidement selon le nombre d'échelons, car les liens possibles dans chaque échelon sont multipliés entre eux. Pour cette raison, Cole [4] choisit de modéliser seulement deux échelons de localisation d'entrepôts.

Pour permettre des flux d'approvisionnement transitant par plus de deux échelons, il est préférable de procéder d'une autre manière. La méthode que nous proposons consiste à faire une approximation du niveau de stocks de sécurité requis à un entrepôt en fonction du flux de produits qui transite par cet entrepôt. En somme, la définition du niveau de service devient implicite dans la quantité de flux d'un produit particulier affecté à un entrepôt ; il s'agit seulement d'évaluer pour certains points repères les stocks de sécurité nécessaires. Par exemple, un gestionnaire peut évaluer que si son entrepôt traite 1000 palettes de produit $k$ par mois, alors il doit garder 100 palettes en guise de stocks de sécurité afin d'offir aux clients le niveau de service adéquat. On peut aussi utiliser cette approche lorsque la distribution de la demande n'est pas connue ; ainsi, l'hypothèse d'une demande suivant une loi normale n'est plus nécessaire.

Rappelons que les stocks de sécurité totaux d'un réseau de distribution peuvent être diminués en agrégeant les demandes (addition des variances). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle l'approximation linéaire de la section 2.2 est nécessaire. Dans cette optique, il faut que les stocks de sécurité calculés à partir du flux de produits reflètent le degré d'agrégation des demandes. Conséquemment, la relation entre le flux de produits et les stocks de sécurité n'est pas linéaire. En plus, l'ampleur des stocks de sécurité à associer à un certain flux doit varier selon le mode de transport utilisé afin de refléter la demande supplémentaire qu'un long délai d'approvisionnement doit couvrir ; ceci complexifie davantage le caractère non linéaire des calculs. Cependant, on peut procéder à une approximation linéaire par segments basée sur

la méthode de Nemhauser et Wolsey [12], comme nous l'avons fait à la section 2.2.

Étant donné que l'approximation donne directement la valeur des stocks de sécurité, les contraintes de définition des variances (13) et celles de définition des stocks de sécurité (12) deviennent obsolètes. Par ailleurs, il faut apporter de légères modifications à la notation :

$$\begin{aligned} a_i &= \text{valeur des flux de produits au point } i \in \Omega; \\ f(a_i) &= \text{valeur des stocks de sécurité au point } i \in \Omega. \end{aligned}$$

Ensuite, il faut modifier les contraintes (4) et (6) afin que les indices des variables reflètent la généralité offerte par la possibilité de faire cheminer les flux par plus d'un échelon de localisation. Dans cette optique, les contraintes (30) et (31) leur sont substituées :

$$\sum_{o\in O^k}\sum_{m\in M^k_{ow}} X^{kmt}_{ow} - \sum_{d\in D^k}\sum_{m\in M^k_{wd}} X^{kmt}_{wd} - I^{kt}_w + I^{k(t-1)}_w = 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T; \quad (30)$$

$$\sum_{d\in D^k}\sum_{k\in K}\sum_{m\in M^k_{wd}} u^k X^{kmt}_{wd} - \sum_{\phi\in\Phi^w} u_{w\phi} Z_{w\phi} \leq 0 \qquad w\in W; t\in T. \quad (31)$$

L'approximation linéaire est accomplie en appliquant les étapes suivantes :

1- Calculer la valeur des $\lambda^{kmt}_{iow}$ pour tous les flux transitant par l'entrepôt concerné :

$$\sum_{d\in D^k}\sum_{m\in M^k_{wd}} X^{kmt}_{wd} = \sum_{i\in\Omega}\sum_{o\in O^k}\sum_{m\in M^k_{ow}} \lambda^{kmt}_{iow}\, a_i \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T; \quad (32)$$

$$\sum_{i\in\Omega} \lambda^{kmt}_{iow} = V^{km}_{ow} \qquad k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T; \quad (33)$$

$$\lambda^{kmt}_{iow} \geq 0 \qquad i\in\Omega; k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T. \quad (34)$$

2- Assurer que les $\lambda^{kmt}_{iow}$ obtenus soient voisins et qu'il y en ait deux qui prennent une valeur positive :

$$\lambda^{kmt}_{1ow} \leq \beta^{kmt}_{1ow} \qquad k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T; \quad (35)$$

$$\lambda^{kmt}_{iow} \leq \beta^{kmt}_{(i-1)ow} + \beta^{kmt}_{iow} \; i\in\Omega\setminus\{1,\omega\}; k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T; \quad (36)$$

$$\lambda^{kmt}_{\omega ow} \leq \beta^{kmt}_{(\omega-1)ow} \qquad k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T; \quad (37)$$

$$\sum_{i\in\Omega\setminus\{\omega\}} \beta^{kmt}_{iow} = 1 \qquad k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T; \quad (38)$$

$$\beta^{kmt}_{iow} \in \{0,1\} \qquad i\in\Omega\setminus\{\omega\}; k\in K; o\in O^k; w\in W^k; m\in M^k_{ow}; t\in T. \quad (39)$$

3- Calculer les stocks de sécurité avec les $\lambda_{iow}^{kmt}$ dont on vient de confirmer la validité :

$$\sum_{i\in\Omega}\sum_{o\in O^k}\sum_{m\in M_{ow}^k} \lambda_{iow}^{kmt}\, f(a_i)\sqrt{\ell_{ow}^m} - I_w^{kt} \;\leq\; 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T. \tag{40}$$

Les contraintes (12) sont donc remplacées par les contraintes linéaires (40), sans oublier l'addition des contraintes techniques (32) à (39).

### 2.3.2 Considérations additionnelles au sujet des stocks

La modélisation présentée à la section 2.1 inclut uniquement les stocks périodiques ayant pour fonction la desserte de demandes futures, et les stocks de sécurité assurant la couverture des variations positives de la demande. Cependant, pour modéliser la réalité plus fidèlement, il faut ajouter les stocks de transit et les stocks cycliques.

Les stocks de transit sont occasionnés par les délais de transport et de manutention relatifs aux activités normales de distribution. Pour les inclure dans le modèle, il faut modifier la fonction-objectif (1) pour qu'elle reflète les coûts que ces stocks engendrent. À cette fin, nous introduisons de nouveaux paramètres qui serviront également à l'inclusion des stocks cycliques :

$f_{pw}^m$ = nombre de livraisons par le mode $m$ pour le lien $(p,w)$ au cours d'une période ;
$\Lambda_{od}^m$ = ratio du temps de transport requis par le lien $(o,d)$ servi par le mode $m$, exprimé en fonction du temps constituant une période de l'horizon temporel.

L'ajout des stocks de transit engendre uniquement la modification de la fonction-objectif (1) du modèle. Il faut y greffer les coûts suivants :

$$\sum_{o\in O^k}\sum_{d\in D^k}\sum_{k\in K}\sum_{m\in M_{od}^k}\sum_{t\in T} X_{od}^{kmt}\Lambda_{od}^m\, r_k\, v_k\,. \tag{41}$$

Les stocks cycliques sont basés sur l'hypothèse de demande continue. Ainsi, entre chaque réapprovisionnement à l'intérieur d'une période, on suppose que la demande aux entrepôts est constante. Ce faisant, la quantité moyenne en stock entre les réapprovisionnements de $X$ unités est de $X/2$. Suivant ce raisonnement, on doit ajouter dans la fonction-objectif (1) les coûts afférents à la quantité moyenne de produit $k$ stockée dans un entrepôt $w$ durant la période $t$ pour faire face aux demandes entre les réapprovisionnements. Il faut donc insérer les termes suivants dans (1) :

$$\sum_{p\in P^k}\sum_{w\in W^k}\sum_{k\in K}\sum_{m\in M_{pw}^k}\sum_{t\in T} X_{pw}^{kmt}\frac{1}{f_{pw}^m}\frac{1}{2}\, r_k\, v_k\,. \tag{42}$$

De plus, il faut modifier les contraintes (7) concernant les capacités de stockage des entrepôts de sorte que les stocks cycliques y soient également incorporés. Conséquemment, il faut les remplacer par les suivantes :

$$\sum_{p\in P^k}\sum_{m\in M_{pw}^k}\sum_{k\in K}\left[h_w^k I_w^{kt} + X_{pw}^{kmt}\frac{1}{f_{pw}^m}\frac{1}{2}\right] - \sum_{\phi\in\Phi^w} h_{w\phi}Z_{w\phi} \;\leq\; 0 \qquad w\in W; t\in T. \tag{43}$$

### 2.3.3 Considérations additionnelles au sujet des capacités

Les contraintes de capacité de traitement (6) et de capacité de stockage (7) du modèle de la section 2.1 sont de nature globale. En effet, elles ne permettent pas de contraindre le traitement et le stockage spécifiques à chaque produit. Dans l'éventualité où il serait souhaitable de limiter les quantités de stocks propres à chaque produit dans les entrepôts, on pourrait simplement ajouter les contraintes suivantes :

$$I_w^{kt} - \sum_{\phi\in\Phi^w} e_{w\phi}^{kt} Z_{w\phi} \;\leq\; 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T; \tag{44}$$

où $e_{w\phi}^{kt}$ est la quantité maximale de produit $k$ stockée à l'entrepôt de type $\phi$ du site $w$ à la période $t$.

De la même manière, l'insertion des contraintes suivantes permet de restreindre les flux spécifiques à chaque produit dans chaque entrepôt :

$$\sum_{c\in C^k}\sum_{m\in M_{wc}^k} X_{wc}^{kmt} - \sum_{\phi\in\Phi^w} q_{w\phi}^{kt} Z_{w\phi} \;\leq\; 0 \qquad k\in K; w\in W^k; t\in T; \tag{45}$$

où $q_{w\phi}^{kt}$ est la quantité maximale de produit $k$ distribuée à partir de l'entrepôt de type $\phi$ du site $w$ à la période $t$.

### 2.3.4 Approvisionnement unique

Les contraintes (10) d'approvisionnement unique sont spécifiques aux produits. Néanmoins, il peut arriver qu'une entreprise désire desservir un client à partir d'une seule origine, et ce, pour tous les produits commandés. Dans une telle éventualité, on peut définir de nouveaux paramètres $n_c$ indiquant nombre de produits différents commandés par le client $c$ et ajouter de nouvelles contraintes comme suit :

$$\sum_{k\in K}\sum_{m\in M_{oc}^k} V_{oc}^{km} - [V_{oc}^{km} n_c] \;=\; 0 \qquad k\in K; o\in O^k; c\in C^k. \tag{46}$$

Remarquons que ces contraintes ne peuvent être satisfaites que s'il existe pour chaque client un entrepôt capable de distribuer tous les produits qu'il demande.

# 3 Méthode de résolution

Le modèle présenté dans la section précédente peut être résolu par une méthode de séparation et évaluation progressive. À cette fin, nous décrivons dans cette section deux techniques permettant d'accélérer la résolution du problème : l'ajout de contraintes valides et l'utilisation de priorités de branchement pour les variables binaires.

## 3.1 Inégalités valides

Les inégalités valides d'affectation des clients impliquent que si le client $c$ a une demande pour le produit $k$ ($c \in C^k$), alors il y a certainement un entrepôt qui le dessert :

$$\sum_{w \in W^k} \sum_{m \in M^k_{wc}} V^k_{wc} \geq 1 \qquad \forall\, c \in C^k; k \in K. \tag{47}$$

Ces contraintes ne sont valides que s'il n'y a pas de lien direct entre les usines et les clients. Dans le cas contraire, il faut plutôt considérer les contraintes suivantes :

$$\sum_{o \in O^k} \sum_{m \in M^k_{oc}} V^k_{oc} \geq 1 \qquad \forall\, c \in C^k; k \in K. \tag{48}$$

Les contraintes qui suivent indiquent qu'un entrepôt doit être implanté avant d'être concerné par des variables d'affectation et de liens de transport :

$$\sum_{\phi \in \Phi^w} Z_{w\phi} \geq \sum_{m \in M^k_{pw}} V^{km}_{pw} \qquad \forall\, w \in W^k; p \in P^k; k \in K; \tag{49}$$

$$\sum_{\phi \in \Phi^w} Z_{w\phi} \geq \sum_{m \in M^k_{wc}} V^{km}_{wc} \qquad \forall\, w \in W^k; c \in C^k; k \in K; \tag{50}$$

$$\sum_{\phi \in \Phi^w} Z_{w\phi} \geq \sum_{m \in M_{pw}} Y^m_{pw} \qquad \forall\, p \in P; w \in W; \tag{51}$$

$$\sum_{\phi \in \Phi^w} Z_{w\phi} \geq \sum_{m \in M_{wc}} Y^m_{wc} \qquad \forall\, w \in W; c \in C. \tag{52}$$

Par ailleurs, les inégalités valides qui suivent stipulent que s'il n'y a pas de flux de produit qui transite via le mode $m$ sur le lien $(o, d)$, alors il est inutile de choisir ce mode et d'en encourir les coûts fixes :

$$Y^m_{od} \leq \sum_{k \in K} V^{km}_{od} \qquad \forall\, o \in O^k; d \in D^k; m \in M^k_{od}. \tag{53}$$

On peut aussi considérer des inégalités qui indiquent que la capacité de traitement totale du réseau de distribution doit au moins pouvoir desservir la capacité de traitement requise par la demande globale (comprenant tous les produits) de tous les clients, et ce, à toutes les périodes de l'horizon temporel :

$$\sum_{w \in W} \sum_{\phi \in \Phi^w} u_{w\phi} Z_{w\phi} \geq \sum_{c \in C^k} \sum_{k \in K} u^k \mu_c^{kt} \qquad \forall\, t \in T. \tag{54}$$

Également, les inégalités suivantes indiquent que le flux total, qui transite par les liens désignés pour les dessertes à partir d'un entrepôt, ne peut excéder la capacité de traitement de cet entrepôt :

$$\sum_{c \in C^k} \sum_{k \in K} \sum_{m \in M_{wc}^k} u^k \mu_c^{kt} V_{wc}^{km} \leq \sum_{\phi \in \Phi^w} u_{w\phi} Z_{w\phi} \qquad \forall\, w \in W; t \in T. \tag{55}$$

Définissions maintenant les paramètres suivants :

$\sqrt{\sum_{c \in C^k} \rho_c^{kt}}$ = Écart-type de la somme des variances associées aux demandes de tous les clients pour le produit $k$ à la période $t$.

Les inégalités suivantes procurent pour leur part des bornes supérieures sur la valeur des stocks de sécurité aux entrepôts selon le raisonnement suivant : la valeur des stocks de sécurité d'un produit pour un entrepôt à une période donnée sera toujours plus petite que la valeur des stocks de sécurité que cet entrepôt devrait garder pour faire face aux variations des demandes de tous les clients pour ce produit et à cette période. On obtient donc

$$\sum_{i \in \Omega} \sum_{p \in P^k} \sum_{m \in M_{pw}^k} \lambda_{ipw}^{kmt} f(a_i) \sqrt{\ell_{pw}^m}\, z \leq \sum_{\phi \in \Phi^w} \sqrt{\sum_{c \in C^k} \rho_c^{kt}}\, Z_{w\phi} \sqrt{\ell_{pw}^m}\, z \quad \forall\, w \in W^k; k \in K; t \in T. \tag{56}$$

En simplifiant les inégalités (56), on obtient enfin

$$\sum_{i \in \Omega} \sum_{p \in P^k} \sum_{m \in M_{pw}^k} \lambda_{ipw}^{kmt} f(a_i) \leq \sum_{\phi \in \Phi^w} \sqrt{\sum_{c \in C^k} \rho_c^{kt}}\, Z_{w\phi} \quad \forall\, w \in W^k; k \in K; t \in T. \tag{57}$$

### 3.2 Priorités de branchement

Afin de réduire le nombre de noeuds explorés dans l'arbre d'énumération, des priorités de branchement peuvent être utilisées. Plus précisément, les branchements se font dans un ordre décroissant de priorité sur les variables binaires $Z_{w\phi}$, $Y_{od}^{m}$, $V_{od}^{km}$ et $\beta_{iod}^{kmt}$. En fait, plus une variable possède d'indices, moins la priorité de branchement lui étant associée sera élevée. La logique sous-tendue par cette assignation des priorités est la suivante : une variable avec peu d'indices conditionne un nombre élevé de variables avec beaucoup d'indices ; la variable avec peu d'indices sera donc plus importante, car en la fixant, on fixe obligatoirement plusieurs autres variables.

## 4 Expérimentation

Afin d'évaluer le temps de calcul requis pour résoudre le modèle proposé, nous avons généré des instances aléatoires similaires à celles utilisées par Cordeau et al. [5]. La section 4.1 décrit brièvement cette procédure et les résultats obtenus sont présentés à la section 4.2.

### 4.1 Génération des instances

Nous avons d'abord défini 48 configurations différentes pour chacune desquelles une instance a été générée. Les configurations varient selon quatres critères susceptibles d'influencer la difficulté de résolution des problèmes, soient :

- l'ampleur du problème ;
- la structure de capacité ;
- les stocks de sécurité ;
- l'horizon de planification.

L'ampleur des problèmes fait référence au nombre de clients ($|C|$), d'usines ($|P|$), de sites d'entreposage ($|W|$) et de produits ($|K|$). Trois configurations sont obtenues en posant $|C| = n$ et $|P| = |W| = |K| = n/3$, pour $n = 24, 32, 48$. Pour toutes les instances générées, il n'y a qu'un seul mode de transport possible entre les usines et les entrepôts ($|M_{pw}| = 1$). Par contre, pour chaque lien entre un entrepôt et un client, le nombre de modes de transport disponibles est choisi au hasard selon une distribution uniforme parmi l'ensemble {1,2,3}. Enfin, on suppose que tous les produits $k \in K$ peuvent transiter par tous les modes de transport disponibles, donc $M_{od}^{k} = M_{od}$.

La structure de capacité fait référence, d'une part, au nombre d'usines pouvant fabriquer un produit particulier ($|P^k|$) et au nombre de sites d'entreposage pouvant traiter ce produit

($|W^k|$), et d'autre part, au nombre de types d'entrepôts envisageables aux sites d'entreposage ($|\Phi^w|$). À chacun de ces aspects sont associées des instances à faible capacité (dénotées par les lettres c et d, respectivement) et d'autres à capacité élevée (dénotées par les lettres C et D, respectivement), ce qui donne un total de quatre configurations possibles. Nous référons le lecteur à l'article de Cordeau, Pasin et Solomon [5] pour plus de détails sur la génération des capacités et des coûts.

Une structure de demande unique est définie pour toutes les instances. D'abord, la cardinalité de l'ensemble des clients qui ont une demande pour le produit $k \in K$ ($|C^k|$) est choisie au hasard selon une distribution uniforme dans l'ensemble {1,...,8}. Une fois que la valeur de $|C^k|$ est fixée, on détermine les éléments qui composent $C^k$ à l'aide de tirages sans remise à partir de l'ensemble contenant tous les clients. Ensuite, on associe des demandes $\mu_c^{kt}$ (une par période) à chaque élément $c \in C^k$. La valeur de chaque $\mu_c^{kt}$ est choisie au hasard selon une distribution uniforme dans l'ensemble {1,...,10}.

Le critère de configuration concernant les stocks de sécurité fait référence à l'ampleur des intervalles de variation des variances $(\sigma_c^{kt})^2$ et des délais de livraison $\ell_{pw}^m$. Les variances sont déterminées en fonction d'un pourcentage des demandes $\mu_c^{kt}$, pourcentage que l'on choisit au hasard selon une distribution uniforme dans l'intervalle [0%;25%] pour les instances à faible variation (dénotées par la lettre s) et dans l'intervalle [0%;75%] pour les instances à forte variation (dénotées par la lettre S). Pour toutes les instances, on fixe le facteur $z$ de la loi normale à 1,96, ce qui équivaut à un niveau de service de 97,5%.

Enfin, deux configurations sont considérées pour l'horizon de planification : les instances saisonnières (dénotées par la lettre t) contiennent quatre périodes et les instances mensuelles (dénotées par la lettre T) contiennent douze périodes.

L'approximation linéaire exposée à la section 2.2 est réalisée à l'aide de quatre points. À chaque point $i \in \Omega$ sont associés un paramètre de variance $a_i$ et un paramètre d'écart-type correspondant $f(a_i)$. Pour déterminer les $a_i$, il faut d'abord calculer la variance maximale $a_{\max}$ que le modèle peut avoir à convertir en écart-type. Pour ce faire, à chaque période, on évalue $a^{kt}$, soit la somme des variances des demandes pour chaque produit. Ainsi, on a que $a^{kt} = \sum_{c \in C^k} \rho_c^{kt}$, $\forall\, k \in K, t \in T$. Ensuite, on calcule $\overline{a}_{\max} = \max\{a^{kt}\}$ pour déterminer la variance maximale parmi l'ensemble des variances obtenues précédemment. Néanmoins, il se peut que la valeur de $\overline{a}_{\max}$ ne puisse jamais être atteinte en raison de la capacité de traitement limitée des entrepôts. Ainsi, on doit déterminer $\overline{a}^w_{\max}$, soit la valeur maximale de la variance pouvant être associée à une demande au niveau d'un entrepôt, valeur qui est contrainte par la capacité de traitement de cet entrepôt. On obtient que $\overline{a}^w_{\max} = \Delta \cdot u_{w|\Phi|}$, où $\Delta$ est le pourcentage maximal de la demande pouvant constituer la variance. Nous avons établi précédemment, dans les intervalles de fixation des variances, que pour les instances à faible variation (lettre s), $\Delta = 25\%$, alors que $\Delta = 75\%$ pour les instances à forte variation (lettre S). On peut finalement calculer la variance maximale qui est susceptible de nécessiter une approximation linéaire avec l'équation suivante : $a_{\max} = \max\{\overline{a}_{\max}, \overline{a}^w_{\max}\}$.

Les caractéristiques des différentes instances sont résumées dans les tableaux 1 à 3. Les instances y sont classées par rapport au nombre de clients qu'elles comportent (24, 32 ou 48). On peut remarquer que le plus petit problème compte près de 3 000 variables binaires et environ 7 500 variables continues, en plus de quelque 7 000 contraintes (excluant les inégalités valides). Par ailleurs, le plus gros problème comporte environ 11 500 variables binaires, 63 500 variables continues et 47 000 contraintes.

TAB. 1 – Caractéristiques des instances comportant 24 clients

| | | | Nombre de variables | | Nombre de |
|---|---|---|---|---|---|
| **Problème** | $\|C\|$ | $\|K\|, \|P\|, \|W\|$ | **binaires** | **continues** | **contraintes** |
| 24cdts | 24 | 8 | 1 166 | 4 196 | 3 231 |
| 24cdtS | 24 | 8 | 1 104 | 3 684 | 2 949 |
| 24cdTs | 24 | 8 | 2 749 | 18 372 | 12 611 |
| 24cdTS | 24 | 8 | 1 930 | 10 128 | 7 815 |
| 24cDts | 24 | 8 | 1 359 | 5 448 | 3 856 |
| 24cDtS | 24 | 8 | 1 377 | 4 468 | 3 730 |
| 24cDTs | 24 | 8 | 3 011 | 13 260 | 11 071 |
| 24cDTS | 24 | 8 | 2 554 | 14 088 | 10 561 |
| 24Cdts | 24 | 8 | 2 502 | 8 756 | 7 299 |
| 24CdtS | 24 | 8 | 2 880 | 9 444 | 8 258 |
| 24CdTs | 24 | 8 | 4 938 | 21 420 | 17 692 |
| 24CdTS | 24 | 8 | 6 319 | 33 888 | 24 059 |
| 24CDts | 24 | 8 | 2 671 | 9 764 | 7 899 |
| 24CDtS | 24 | 8 | 3 099 | 9 928 | 8 717 |
| 24CDTs | 24 | 8 | 9 954 | 39 432 | 32 533 |
| 24CDTS | 24 | 8 | 4 899 | 26 460 | 19 037 |

## 4.2 Résultats des expériences de calcul

Les tests ont été réalisés à l'aide du logiciel CPLEX 7.1 en utilisant les paramètres par défaut, à l'exception du *strong branching* et des priorités de branchement définies à la section précédente. Tous les tests ont été effectués sur un ordinateur Pentium 4 disposant de 1 Gb de mémoire vive et les temps de calcul rapportés (CPU) sont exprimés en minutes.

L'impact des inégalités valides de la section 3.1 a d'abord été étudié. Plusieurs combinaisons de ces inégalités ont été testées et les résultats ont démontré qu'il est avantageux d'inclure simultanément toutes les inégalités valides. Ceci procure la meilleure relaxation linéaire, le plus petit nombre de noeuds explorés dans l'arbre d'énumération et les temps de calcul les

TAB. 2 – Caractéristiques des instances comportant 32 clients

| Problème | $\|C\|$ | $\|K\|$, $\|P\|$, $\|W\|$ | Nombre de variables binaires | Nombre de variables continues | Nombre de contraintes |
|---|---|---|---|---|---|
| 32cdts | 32 | 12 | 1 421 | 4 436 | 3 355 |
| 32cdtS | 32 | 12 | 1 820 | 5 924 | 4 738 |
| 32cdTs | 32 | 12 | 3 887 | 19 212 | 14 778 |
| 32cdTS | 32 | 12 | 3 898 | 25 488 | 16 974 |
| 32cDts | 32 | 12 | 1 957 | 7 864 | 5 538 |
| 32cDtS | 32 | 12 | 1 786 | 5 964 | 4 510 |
| 32cDTs | 32 | 12 | 4 663 | 24 696 | 18 587 |
| 32cDTS | 32 | 12 | 3 605 | 21 468 | 15 206 |
| 32Cdts | 32 | 12 | 3 507 | 8 354 | 8 730 |
| 32CdtS | 32 | 12 | 3 574 | 8 552 | 8 997 |
| 32CdTs | 32 | 12 | 7 997 | 27 240 | 25 469 |
| 32CdTS | 32 | 12 | 8 053 | 34 608 | 28 353 |
| 32CDts | 32 | 12 | 3 452 | 12 696 | 10 004 |
| 32CDtS | 32 | 12 | 4 796 | 14 080 | 12 876 |
| 32CDTs | 32 | 12 | 5 614 | 27 156 | 21 243 |
| 32CDTS | 32 | 12 | 10 670 | 42 360 | 35 777 |

plus courts. En conséquence, tous les tests effectués par la suite ont été réalisés avec ces inégalités.

Nous avons ensuite évalué l'impact des priorités de branchement sur la performance. Les gains d'efficacité obtenus suite à l'ajout de priorités de branchement pour les petites instances sont relatés au tableau 4. De manière générale, on peut y constater que les priorités de branchement réduisent le temps de calcul (en minutes) ainsi que le nombre de noeuds à explorer.

Finalement, le tableau 5 présente les temps de calcul (en minutes) et les sauts d'intégralité pour tous les problèmes. On remarque que les temps de calcul sont très variables d'un problème à l'autre, mais les variations se font de manière bien définie. En effet, plus on accroît le nombre de clients, et par le fait même le nombre d'usines, de sites d'entreposage et de produits, plus les problèmes sont difficiles à résoudre. Également, les différents critères de configuration ont un impact sur le temps de calcul et le saut d'intégralité des problèmes. En particulier, le critère de capacité ayant trait au nombre d'usines pouvant fabriquer le produit $k$ et au nombre d'entrepôts pouvant traiter le produit $k$ (lettres c et C) est celui qui a le plus d'impact sur la difficulté de résolution des problèmes. En effet, les instances à capacité élevée (lettre C) nécessitent un temps de calcul beaucoup plus substantiel que les instances à faible capacité (lettre c).

TAB. 3 – Caractéristiques des instances comportant 48 clients

| Problème | $\|C\|$ | $\|K\|, \|P\|, \|W\|$ | Nombre de variables binaires | Nombre de variables continues | Nombre de contraintes |
|---|---|---|---|---|---|
| 48cdts | 48 | 16 | 3 546 | 9 024 | 7 465 |
| 48cdtS | 48 | 16 | 3 734 | 10 008 | 8 043 |
| 48cdTs | 48 | 16 | 6 195 | 32 376 | 23 382 |
| 48cdTS | 48 | 16 | 5 764 | 29 664 | 21 519 |
| 48cDts | 48 | 16 | 3 552 | 9 660 | 7 735 |
| 48cDtS | 48 | 16 | 3 380 | 8 380 | 6 681 |
| 48cDTs | 48 | 16 | 6 496 | 39 672 | 26 663 |
| 48cDTS | 48 | 16 | 6 217 | 30 084 | 22 381 |
| 48Cdts | 48 | 16 | 6 784 | 19 612 | 17 309 |
| 48CdtS | 48 | 16 | 5 390 | 15 752 | 13 366 |
| 48CdTs | 48 | 16 | 11 818 | 47 820 | 40 148 |
| 48CdTS | 48 | 16 | 14 871 | 54 708 | 48 214 |
| 48CDts | 48 | 16 | 6 027 | 16 892 | 14 923 |
| 48CDtS | 48 | 16 | 6 465 | 21 548 | 17 396 |
| 48CDTs | 48 | 16 | 10 487 | 55 344 | 40 270 |
| 48CDTS | 48 | 16 | 15 748 | 65 508 | 53 825 |

Le critère de variabilité des stocks de sécurité n'a pas d'impact clair sur le temps de calcul et le saut d'intégralité. En conséquence, le modèle s'applique aussi bien à des situations de délais de livraison très variables et à des variances très variables qu'à des situations plus déterministes où les stocks de sécurité ne constituent pas une portion importante des produits à l'intérieur du réseau de distribution.

De manière générale, on remarque que, malgré l'ajout des inégalités de la section 3.1, le saut d'intégralité peut tout de même atteindre des valeurs assez élevées, par exemple 11,8% dans le cas du problème 48Cdts. Toutefois, certains sauts d'intégralité sont remarquablement petits, par exemple 1,3% dans le cas du problème 24cdTS. La moyenne des sauts d'intégralité de tous les problèmes se chiffre à 5,5%, mais si on la stratifie par rapport aux nombre de clients, on obtient 4,7% pour les problèmes avec 24 clients, 6,1% pour les problèmes avec 32 clients et 5,5% pour les problèmes avec 48 clients. Ainsi, on ne peut pas conclure que le saut d'intégralité est nécessairement accru avec l'ampleur des problèmes.

Concernant les temps de calcul, on constate que le plus gros problème, soit 48CDTS, requiert 4,6 heures (274,8 min) de calcul, ce qui est beaucoup ; mais étant donnée la nature stratégique du problème étudié, on peut dire qu'il s'agit d'un temps raisonnable. De toute manière, le temps de calcul du problème 48CDTS est exceptionnellement élevé par rapport à celui des autres problèmes.

TAB. 4 – Impact des priorités de branchement sur les petits problèmes

| | Sans priorité | | Avec priorités | |
|---|---|---|---|---|
| **Problème** | **CPU** | **Noeuds** | **CPU** | **Noeuds** |
| 24cdts | 0,4 | 171 | 0,3 | 176 |
| 24cdtS | 0,1 | 59 | 0,0 | 51 |
| 24cdTs | 1,1 | 110 | 0,9 | 110 |
| 24cdTS | 0,4 | 155 | 0,4 | 136 |
| 24cDts | 3,5 | 400 | 2,6 | 485 |
| 24cDtS | 2,8 | 418 | 2,4 | 437 |
| 24cDTs | 4,6 | 624 | 1,4 | 188 |
| 24cDTS | 0,9 | 143 | 0,8 | 144 |
| 24Cdts | 1,6 | 131 | 2,1 | 166 |
| 24CdtS | 8,3 | 628 | 0,6 | 68 |
| 24CdTs | 1,9 | 244 | 3,0 | 400 |
| 24CdTS | 4,0 | 292 | 2,0 | 136 |
| 24CDts | 80,5 | 2 061 | 15,5 | 498 |
| 24CDtS | 13,4 | 765 | 15,7 | 995 |
| 24CDTs | 481,9 | 3 266 | 94,7 | 638 |
| 24CDTS | 7,3 | 160 | 36,6 | 859 |

TAB. 5 – Temps de calcul et sauts d'intégralité pour tous les problèmes

| **Prob.** | **CPU** | **Saut** | **Prob.** | **CPU** | **Saut** | **Prob.** | **CPU** | **Saut** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24cdts | 0,3 | 4,1% | 32cdts | 0,5 | 1,9% | 48cdts | 3,3 | 4,1% |
| 24cdtS | 0,0 | 1,8% | 32cdtS | 0,4 | 6,5% | 48cdtS | 66,0 | 5,6% |
| 24cdTs | 0,9 | 3,3% | 32cdTs | 1,5 | 2,9% | 48cdTs | 11,5 | 5,7% |
| 24cdTS | 0,4 | 1,3% | 32cdTS | 1,0 | 2,2% | 48cdTS | 2,1 | 2,4% |
| 24cDts | 2,6 | 4,3% | 32cDts | 3,1 | 9,9% | 48cDts | 7,1 | 10,5% |
| 24cDtS | 2,4 | 9,4% | 32cDtS | 2,9 | 11,0% | 48cDtS | 6,0 | 6,6% |
| 24cDTs | 1,4 | 4,6% | 32cDTs | 3,1 | 5,6% | 48cDTs | 4,7 | 4,5% |
| 24cDTS | 0,8 | 6,2% | 32cDTS | 6,6 | 4,9% | 48cDTS | 14,2 | 4,5% |
| 24Cdts | 2,1 | 6,6% | 32Cdts | 1,5 | 2,5% | 48Cdts | 39,1 | 11,8% |
| 24CdtS | 0,6 | 3,1% | 32CdtS | 5,2 | 3,6% | 48CdtS | 3,6 | 7,3% |
| 24CdTs | 3,0 | 2,8% | 32CdTs | 3,8 | 2,0% | 48CdTs | 19,2 | 3,3% |
| 24CdTS | 2,0 | 1,3% | 32CdTS | 16,7 | 11,3% | 48CdTS | 129,4 | 5,0% |
| 24CDts | 15,5 | 7,6% | 32CDts | 13,1 | 9,5% | 48CDts | 28,7 | 4,9% |
| 24CDtS | 15,7 | 11,4% | 32CDtS | 42,3 | 11,1% | 48CDtS | 28,1 | 8,0% |
| 24CDTs | 94,7 | 3,8% | 32CDTs | 13,8 | 2,5% | 48CDTs | 54,6 | 4,6% |
| 24CDTS | 36,6 | 3,1% | 32CDTS | 90,2 | 10,7% | 48CDTS | 274,8 | 3,1% |

# 5 Conclusion

Cet article a présenté une formulation mathématique détaillée du problème de conception de réseaux de distribution multi-périodes avec une demande stochastique. La modélisation originale comportant des contraintes non linéaires générées par l'inclusion des stocks de sécurité a été linéarisée grâce à une méthode d'approximation linéaire par morceaux. De nombreuses extensions au modèle de base ont également été présentées. Afin d'accélérer la résolution du problème, des inégalités valides ont aussi été décrites.

L'approximation linéaire par segments, telle qu'expliquée à la section 2.2, s'avère lourde. En effet, la majorité des variables binaires sont générées par cette approximation, et c'est la présence de ce type de variables qui rend la résolution difficile. Des instances de taille réaliste peuvent néanmoins être résolues en des temps de calcul raisonnables. Pour les instances de plus grande taille, des approches de décomposition telles la décomposition de Benders seraient sans doute mieux adaptées. De telles approches feront l'objet de travaux ultérieurs.

# Références


[1] C.H. Aikens. Facility location models for distribution planning. *European Journal of Operational Research*, 22 :263–279, 1985.

[2] B.C. Arntzen, G.G. Brown, T.P. Harrison, and L.L. Trafton. Global supply chain management at Digital Equipment Corporation. *Interfaces*, 25(1) :69–93, 1995.

[3] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*. Wiley, New York, 1993.

[4] M.H. Cole. *Service Considerations and The Design of Strategic Distribution Systems*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 1995.

[5] J.F. Cordeau, F. Pasin, and M.M. Solomon. An integrated model for logistics network design. *Annals of Operations Research*, 2004. Forthcoming.

[6] R.V. Delaney. Trends in logistics and U.S. world competitiveness. *Transportation Quarterly*, 45 :19–41, 1991.

[7] K. Dogan and M. Goetschalckx. A primal decomposition method for the integrated design of multi-period production-distribution systems. *IIE Transactions*, 31 :1027–1036, 1999.

[8] Z. Drezner, editor. *Facility Location*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] A.M. Geoffrion and G.W. Graves. Multicommodity distribution system design by Benders decomposition. *Management Science*, 20 :822–844, 1974.

[10] S.D. Lapierre, A. Ruiz, and P. Soriano. Designing distribution networks : Formulations and solution heuristic. *Transportation Science*, 38 :174–187, 2004.

[11] C.Y. Lee. A cross decomposition algorithm for a multiproduct-multitype facility location problem. *Computers and Operations Research*, 20 :527–540, 1993.

[12] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, New York, 1988.

[13] N.S. Novich. Leading edge distribution strategies. *The Journal of Business Strategy*, pages 48–53, novembre/décembre 1990.

[14] H. Pirkul and V. Jayaraman. Production, transportation, and distribution planning in a multi-commodity tri-echelon system. *Transportation Science*, 30 :291–302, 1996.

[15] D.J. Thomas and P.M. Griffin. Coordinated supply chain management. *European Journal of Operational Research*, 94 :1–15, 1996.

[16] C.J. Vidal and M. Goetschalckx. Strategic production-distribution models : A critical review with emphasis on global supply chain models. *European Journal of Operational Research*, 98 :1–18, 1997.